

Оглавление

Предисловие.....	7
Часть I. Основные идеи и понятия группового анализа	15
Лекция 1. Группы преобразований.....	16
1.1. Замена переменных в дифференциальном уравнении .	16
1.2. Группа симметрий	17
1.3. Группы эквивалентности	18
1.4. Подмодели	20
1.5. Дискретные и непрерывные группы	22
Лекция 2. Базовые идеи.....	25
2.1. Уравнение = поверхность	25
2.2. Преобразования и траектории	27
2.3. Автономное дифференциальное уравнение	28
2.4. Порождающее векторное поле	29
2.5. Порождающий дифференциальный оператор	32
2.6. Продолжение на производные	34
2.7. Действие дифференциального оператора	36
Лекция 3. Основные формулы и их применение	40
3.1. Уравнение первого порядка	40
3.2. Многомерный случай	43
3.3. Локальная аппроксимация группы	44
3.4. Второе продолжение	47
3.5. Уравнение второго порядка	48
Лекция 4. Группа эквивалентности.....	54
4.1. Порождающее векторное поле и оператор	54
4.2. Формула для компоненты ϕ	56
4.3. Независимость правой части от производной	58
4.4. Вычисление группы эквивалентности	59

4.5. Структура группы эквивалентности	62
Часть II. Техника группового анализа	65
Лекция 5. Технология классификации	66
5.1. Краткое содержание предыдущих серий	66
5.2. Линейный случай	67
5.3. Нелинейный случай	68
5.4. Случай I.2.1	70
5.4.1. Редукция	71
5.4.2. Если $f_0 \neq 0$	72
5.4.3. Если $f_0 = 0$	73
5.4.4. Если $k = -3$	74
5.4.5. Ревизия	76
5.4.6. Реверс: двигаемся от группы	77
5.4.7. Завершение Случая I.2.1	78
Лекция 6. Алгебры Ли	81
6.1. Целостный взгляд	81
6.2. Однопараметрические не-группы	83
6.3. Коммутатор	84
6.4. Конечномерные алгебры в $\mathbb{R}^1$	86
6.5. Вещественная классификация	88
6.6. Конечномерность группы симметрий	89
6.7. Классификация групп в $\mathbb{R}^2$	93
Лекция 7. Группы и геометрия	97
7.1. Геометрия сферы	97
7.2. Сфера и плоскость	98
7.3. Метрическая форма	101
7.4. Преобразования римановой метрики	102
7.5. Преобразования в канонических метриках	103
7.6. Инверсии	106
7.7. Проективная группа	108
Лекция 8. Таблица коммутаторов	111
8.1. Подалгебры и коммутаторы	111
8.2. Конформная алгебра. Трехмерный случай	113
8.3. Получение анзаца решений	114
8.4. Решение уравнений	116
8.5. Преобразования конформной группы	121
8.6. Таблица коммутаторов	121

Часть III. Групповой анализ 125**Лекция 9. ГК уравнений эйконала 126**

- 9.1. Уравнение эйконала 126
 - 9.1.1. Основные понятия геометрической оптики . . . 126
 - 9.1.2. Уравнение эйконала и геометрия лучей 128
 - 9.1.3. Постановка задачи 130
- 9.2. Группы симметрий и эквивалентности 130
- 9.3. Группа эквивалентности 131
- 9.4. Определяющие уравнения ГС 133
 - 9.4.1. Классифицирующие уравнения 134

Лекция 10. ГК уравнений эйконала (продолжение). 139

- 10.1. Первичная сепарация 139
 - 10.1.1. Случай $A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0$ 140
 - 10.1.2. Случай $A' = B' = C' \equiv 0, E'^2 + F'^2 + G'^2 \neq 0$. . 142
 - 10.1.3. Случай $A' = B' = C' = E' = F' = G' \equiv 0, D' \neq 0$ 143
 - 10.1.4. Случай $A' = B' = C' = E' = F' = G' = D' \equiv 0,$
 $H'^2 + I'^2 + J'^2 \neq 0$ 143
 - 10.1.5. Случай $\xi_\psi = \eta_\psi = \zeta_\psi \equiv 0$ 143
- 10.2. Особые случаи функции скорости 143
 - 10.2.1. Случай $v(x, y, z) \equiv 1$ 144
 - 10.2.2. Случай $v(x, y, z) = x$ 145
 - 10.2.3. Случай $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2$ 146
 - 10.2.4. «Тонкая очистка» особых случаев 149

Лекция 11. ГК уравнений эйконала (окончание) 151

- 11.1. Вторичная сепарация 151
 - 11.1.1. Случай функции (10.7) 153
 - 11.1.2. Случай функции (10.6) 155
 - 11.1.3. Случай функции (10.5) 157
- 11.2. Уравнение ветвления 159
- 11.3. Случай $\xi_\psi = \eta_\psi = \zeta_\psi = 0$ 161
- 11.4. Окончательная классификация 162
- 11.5. Формулировка теоремы 163

Лекция 12. Групповой анализ и синтез 167

- 12.1. Что такое групповой синтез? 167
- 12.2. Уравнения с 15-мерной группой
 симметрий 168
 - 12.2.1. Геометрия 168
 - 12.2.2. Физика 168

12.2.3. Интегрируемость	169
12.2.4. Иллюзия движущегося источника	171
Лекция 13. Групповой синтез (окончание).....	178
13.1. Уравнения с 4–6-мерной группой симметрий	178
13.1.1. Физика	178
13.1.2. Интегрируемость	179
13.1.3. Двумерное уравнение эйконала	180
13.1.4. Геометрия	181
13.1.5. И еще раз об интегрировании	185
13.1.6. И еще раз физика	188
13.2. Принципы группового анализа	190
Часть IV. Теория Ли.....	195
Лекция 14. Многомерные группы.....	196
14.1. Постановка проблемы	197
14.2. Основные уравнения	198
14.3. Теорема Фробениуса	200
14.4. Доказательство теоремы	201
14.5. Условие разрешимости системы (12.1)	205
Лекция 15. Автоморфизмы.....	209
15.1. Действие группы на себя	209
15.2. Группа и ее представление	210
15.3. Группа автоморфизмов и ее алгебра	211
15.4. Канонические переменные	212
15.5. Сведение к линейной системе	216
15.6. Тождество Якоби	217
Лекция 16. Теоремы Ли.....	221
16.1. Решение линейной системы	221
16.2. Свойства функции $U(u)$	222
16.3. Теоремы Ли	225
16.4. Комментарии	226
Лекция 17. Классификация алгебр Ли.....	230
17.1. Орбиты и группы голономии	230
17.2. Двумерные группы	232
17.2.1. Случай коммутативной группы	234
17.2.2. Случай некоммутативной группы	235
17.3. Классификация трехмерных алгебр	236

17.3.1. Доказательство. Условие наличия коммутативной подалгебры	237
17.3.2. Доказательство теоремы. Алгебры с коммутативной подалгеброй	238
17.3.3. Случай алгебры, не имеющей коммутативных подалгебр	241
17.4. Реализации трехмерных групп	243
Лекция 18. Геометрия группы	247
18.1. Групповая метрика	247
18.2. Инвариантные римановы метрики для двумерных и трехмерных групп	250
18.3. Двойственная алгебра	251
18.4. Инвариантные кривые	254
18.5. Уравнения Френе	256
Часть V. Ипостаси группового анализа	261
Лекция 19. Касательные преобразования	262
19.1. «Группа в себе»	262
19.2. Уравнение второго порядка	264
19.3. Теорема Бэклунда	266
19.4. Преобразования Ли–Бэклунда	268
19.5. Второй закон Ньютона	270
19.6. Принцип относительности для $F = ta$	273
Лекция 20. Инварианты	279
20.1. Конформные преобразования плоскости	281
20.2. Инварианты группы эквивалентности	284
20.3. И снова геометрия	288
Лекция 21. Инварианты (окончание)	291
21.1. Геометрические инварианты	291
21.2. Сводимость к плоскому слоению	293
21.3. К проблеме эквивалентности	298
21.4. Уравнение с квазиплоским слоением	300
21.5. Теорема о семи инвариантах	304
Лекция 22. Проблема физического смысла	309
22.1. Эвристические принципы и физический смысл	309
22.2. Проблема Максвелла	310
22.3. Математическая постановка	314
22.4. Трансформация постановки задачи	317

22.4.1. Первая постановка задачи. Эффект всеобщей эквивалентности.	317
22.4.2. Вторая постановка задачи	320
22.4.3. Третья постановка задачи. Условие инвариантности интегрирования «по c »	321
22.4.4. Четвертая постановка задачи. Условие инвариантности числа частиц	323
22.4.5. Пятая постановка задачи. Куда поставить произвольную функцию?	325
Заключение	328
Литература	329
Приложение I. Классификация ОДУ 2-го порядка . .	332
Приложение II. Дву- и трехмерные алгебры	334
II.1. Двумерные алгебры	334
II.2. Трехмерные алгебры	335
Приложение III. Инвариантные метрики	339
Предметный указатель	341